CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont **autorisées**, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-186 du 16/11/99.*

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.

Si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$.

On note $\mathrm{K}_n[X]$ la K-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ la K-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$; les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ sont notés $M = (m_{ij})$.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(A - X\,I_n)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ est un polynôme unitaire de $\mathrm{K}_n[X]$ on lui associe

la **matrice compagnon** $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{ij})$ est définie par $c_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{in} = -a_{i-1}$ et $c_{ij} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II. III. *et* IV. *utilisent les résultats de la partie* I. *et sont indépendantes entre elles.*

Tournez la page S.V.P.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ de $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = k\, P$.

3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4. On note ${}^t C_P$ la transposée de la matrice C_P.

a. Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}({}^t C_P)$.

b. Soit λ élément de $\mathrm{Sp}({}^t C_P)$, déterminer le sous-espace propre de ${}^t C_P$ associé à λ.

c. Montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.

d. On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^{\,2} & \lambda_2^{\,2} & . & . & \lambda_n^{\,2} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{\,n-1} & \lambda_2^{\,n-1} & . & . & \lambda_n^{\,n-1} \end{vmatrix}$$ est non nul.

5. *Exemples* :

a. Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :
$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999\, I_n .$$

b. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1\le i\le n$:

$r_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ et $D_i=\{\,z\in\mathbb{C},\ |z|\le r_i\,\}$.

Pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$.

6. Soit $\lambda\in \mathrm{Sp}(A)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

Montrer que pour tout entier $1\le i\le n$: $|\lambda\, x_i|\le r_i\|X\|_\infty$.

7. Démontrer que $\mathrm{Sp}(A)\subset\bigcup_{k=1}^{n}D_k$.

8. Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R=\max\{|a_0|,1+|a_1|,1+|a_2|,\ldots,1+|a_{n-1}|\}$.

9. *Application* :

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a+n^b=n^c+n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $P=X^p+a_{p-1}X^{p-1}+\ldots+a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0\neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}:\ u(n+p)=-a_{p-1}u(n+p-1)-\ldots-a_0u(n).$$

Tournez la page S.V.P.

10. Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

11. Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), ..., u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

12. Pour tout entier $0 \leq i \leq p-1$ on définit les éléments e_i de F par :
$e_i(i) = 1$ et, lorsque $0 \leq j \leq p-1$ et $j \neq i$, $e_i(j) = 0$.

a. Déterminer pour $0 \leq i \leq p-1$, $e_i(p)$.

b. Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, ..., e_{p-1})$ est une base de F.

c. Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$.

13. Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.

14. Si g est l'endomorphisme de F induit par f, montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, ..., e_{p-1})$ est ${}^t C_P$.

15. On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$.

a. Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.

b. En déduire que, si u est élément de F, il existe des constantes complexes $k_0, k_1, ..., k_{p-1}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(n) = k_0 \lambda_0^n + k_1 \lambda_1^n + ... + k_{p-1} \lambda_{p-1}^n$.

16. *Exemple* : (On revient à la notation usuelle u_n)

Soit a, b et c trois réels distincts.
Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a+b+c)\, u_{n+2} - (ab+ac+bc)\, u_{n+1} + abc\, u_n .$$

IV. Matrices vérifiant : rg$(U-V)=1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_A la matrice compagnon du polynôme $(-1)^n \chi_A$.

17. Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?

Pour tout couple (U,V) de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(*) : $\mathrm{rg}(U-V)=1$

(**) : Il existe une matrice inversible P telle que $U=P^{-1}C_UP$ et $V=P^{-1}C_VP$.

18. Montrer qu'un couple (U,V) de matrices distinctes de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ vérifiant (**) vérifie (*).

19. Déterminer un couple (U,V) de matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$ $(n=2)$ vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

Dans la suite de cette partie, (U,V) est un couple de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ vérifiant (*) et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base B, on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.
Enfin on pose $H=\mathrm{Ker}(u-v)$.

20. Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

21. Soit $F\neq\{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et par v c'est-à-dire :

$$u(F)\subset F \text{ et } v(F)\subset F.$$

On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.
On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u.

a. Montrer que F n'est pas inclus dans H.

b. On suppose que $F\neq E$, montrer que $F+H=E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B' montrer que l'on aboutit à une contradiction.

c. Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?

22. Pour $j\in\mathbb{N}$, on note $G_j=\{x\in E, u^j(x)\in H\}$.

a. Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.

b. Montrer que $\bigcap_{j=0}^{n-2}G_j\neq\{0\}$.

Tournez la page S.V.P.

c. Soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leq j \leq n-1$: $e_j = u^j(y)$.

Montrer que $B'' = (e_0, e_1, ..., e_{n-1})$ est une base de E.

(On pourra considérer $F = \text{vect}\{y, u(y), ..., u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $(y, u(y), ..., u^{p-1}(y))$ est libre).

d. Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).

e. Conclure.

23. *Application* :

Soit u et v deux automorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n vérifiant :

$$\text{rg}(u - v) = 1, \quad \chi_u(X) = (-1)^n (X^n + 1) \quad \text{et} \quad \chi_v(X) = (-1)^n (X^n - 1).$$

En utilisant une action de groupe, montrer que le groupe engendré par u et v est fini de cardinal inférieur ou égal à $(2n)!$.

Fin de l'énoncé.